**Univerzitet u Novom Sadu**
**Prirodno-matematicki fakultet**
**Departman za fiziku**
**Smer - astronomija sa astrofizikom**

# Naslov:
# Rankin-Igonioove jednačine

**Seminarski rad iz predmeta Fizika Zvezda**

**Student:**
**Marjanović Rade 420/02**

**Mentor:**
**prof. dr Božidar Vujičić**

**Januar, 2007. godine**
**Novi Sad**

Magnetohidrodinamička teorija udarnih talasa

Prilikom razmatranja prostiranja poremećaja kroz plazmu dobijaju se, u opštem slučaju, **nelinearne diferencijalne jednačine,** i to kako u MHD aproksimaciji, tako i u višekomponentnim hidrodinamičkim sistemima. Ove jednačine se mogu **linearizovati**, ako su amplitude poremećaja male, kao što je to slučaj za idealnu i beskonačnu plazmu. Postoje situacije za koje se mora uzeti u obzir konačna amplituda poremećaja. Kako pokazuje detaljnija analiza, u takvim situacijama može doći do uspostavljanja takvog stanja u kome hidrodinamičke veličine plazme **nisu više neprekidne funkcije koordinata i vremena**; stanje sa neprekidnim početnim i graničnim uslovima može da evoluira u stanje u kome spomenute veličine **trpe skok** na izvesnim površinama unutar oblasti koju zauzima plazma. Takva situacija se posmatra i eksperimentalno. Ove **površine diskontinuiteta** se po pravilu kreću kroz plazmu, obično nadzvučnom brzinom. Zbog jednostavnosti ćemo da se ograničimo **samo na MHD-aproksimaciju** i iskoristiti sledeće jednačine kao polazne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla P + \frac{1}{\mu_0}\left(rot\vec{B}\right) \times \vec{B} + \mu \Delta \vec{v} + \left(\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\left(\nabla \vec{v}\right)$$

$$P = F\left(\rho\right)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) + v_m \Delta \vec{B} \quad \left(v_m = \frac{1}{\mu_0 o}\right)$$

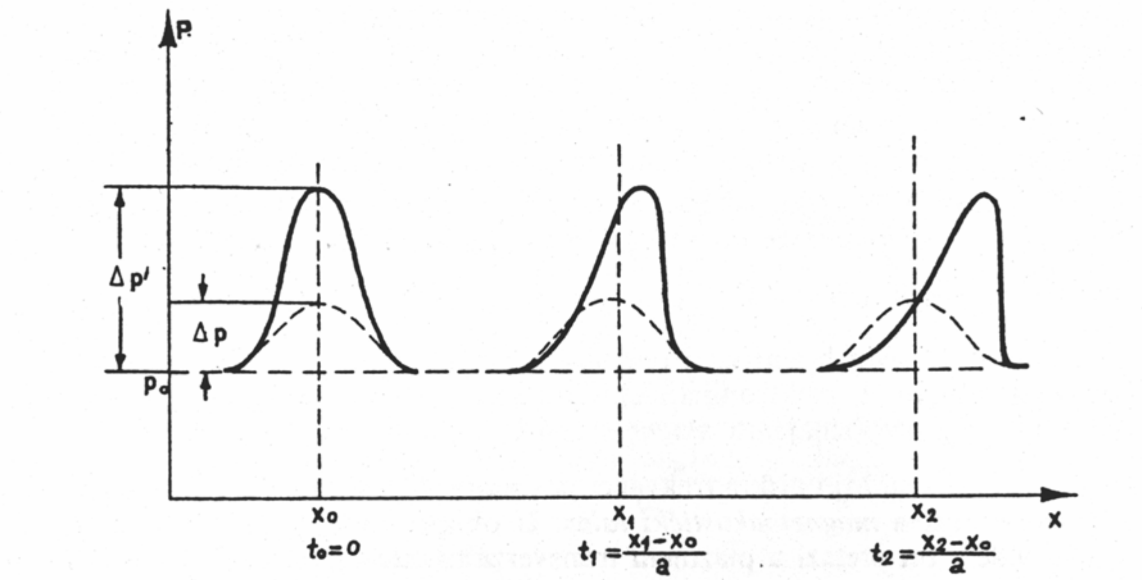
$$div\vec{B} = 0$$

Navedeni sistem predstavlja osnovu fizičke teorije poznatije kao **magnetna hidrodinamika (MHD)**. Pretpostavka da se procesi u plazmi mogu opisivati kao ovom teorijom i ovim jednačinama je poznatija kao **MHD-aproksimacija**.

Fizički razlog za nastajanje rešenja sa površinama diskontinuiteta se može razmotriti na ovakav način. Neka je u homogenom,idealnom i stišljivom elektroprovodnom fluidu van magnetnog polja, na nekom mestu nastao poremećaj gustine (pritiska) u vidu Gausovog (zvonastog) impulsa (slika 1).Ako je amplituda tog poremećaja mala, mogu se primeniti linearizovane jednačine MHD i kao rešenje se dobija akustički talas koji se prostire brzinom:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} \sim \sqrt{\gamma \rho_0^{\gamma-1}}$$

kao posledica linearnosti relevantnih jednačina izlazi da **profil impulsa ostaje neizmenjen** (isprekidana linija).




*Slika 1.*

Međutim, ako posmatrana amplituda nije mala, mora se uzeti u obzir da, u skladu sa malopre napisanom relacijom za brzinu zvuka, zadnji deo impulsa, koji se kreće po već sabijenom fluidu ima nezanemarljivo veću brzinu prostiranja nego prednji. Usled toga zadnji deo impulsa sustiže prednji, širina impulsa se sa vremenom smanjuje i, teorijski,teži nuli, ukoliko se ne uzmu u obzir disipativni efekti, kao što je viskoznost, toplotna provodljivost i konačna električna provodnost. Međutim ovi efekti se moraju uzeti u obzir kad širina impulsa postane mala, recimo reda veličine nekoliko srednjih slobodnih puteva molekula fluida. Disipacija E i impulsa će zaustaviti dalje smanjenje širine posmatranog impulsa i, realno govoreći, ne nastaju **površine diskontinuiteta** već **uske oblasti reda veličine nekoliko srednjih slobodnih puteva**, unutar kojih su gradijenti hidrodinamičkih veličina vrlo veliki i disipativni efekti, koji zavise od ovih gradijenata, dominantni. Disipativni efekti će dovesti do postepenog smanjenja amplitude poremećaja, a kad ova amplituda postane vrlo mala poremećaj će degenerisati u običan zvuk.

**Udarnim talasom se naziva diskontinuitet u parametrima sredine (ρ, P, T) koji se prostire kroz sredinu brzinom većom od brzine zvuka u toj sredini.**

**Udarni talas-diskontinuitet kod kog je gustina fluida različita ispred i iza diskontinuiteta.**

Zagrevanje fluida kroz koji je prošao udarni talas vrši se na račun uređene energije talasa.

**Površina na kojoj parametri fluida trpe skok naziva se <u>front udarnog talasa.</u>**

Udarni talasi su od interesa u fizici plazme (a samim tim i astrofizici, tj. fizici zvezda) zbog toga, što je temperatura iza površine diskontinuiteta kod njih veća, tako da se udarni talasi mogu koristiti za zagrevanje plazme.

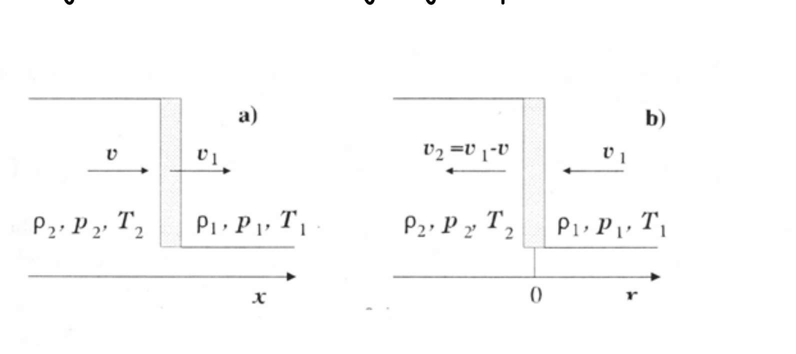
Udarni talas može biti sferni, cilindrični ili ravan u zavisnosti od načina na koji je izvršeno oslobađanje E (u "tački", duž neke ose ili duž beskonačne površine).

Prvi problem koji se javlja koji se javlja kod proučavanja udarnih talasa je problem **strukture udarnog fronta**, tj. izmene hidrodinamičkih veličina unutar spomenute oblasti širine nekoliko srednjih slobodnih puteva molekula. U tom slučaju presudnu ulogu igraju efekti viskoznosti, električne i toplotne provodnosti.

Drugi problem je **analiza promene parametara fluida posle prolaza kroz front udarnog talasa.**

Rankine-Hugoniot-ove (Rankin-Igonioove) jednačine

Zbog pojednostavljenja posmatraćemo samo **stacionaran** udarni talas (udarni front se kreće konstantnom brzinom), Pretpostavićemo da je udarni front **ravan** i zanemarićemo dejstvo zapreminskih sila neelektromagnetnog porekla. Matematička strana problema postaje onda sasvim jednostavna i dobijeni rezultati dozvoljavaju neposrednu fizičku interpretaciju.




*Slika 2.*

Odabraćemo sistem reference koji se kreće zajedno sa udarnim frontom, a samu ravan fronta ćemo uzeti za yOz-ravan. Taj sistem reference je inercijalan i može biti odabran tako, da brzina proticanja fluida sa obe strane fronta ima samo komponentu normalnu na front (x-osa). U njemu sve jednačine zavise samo od x-koordinate, pa jednačine dinamike fluida dobijaju jednostavan oblik, $\left(\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$.

***Napomena:** U laboratorijskom sistemu reference udarni front se kreće kroz fluid izvesnom brzinom, a fluid ispred fronta miruje. U određenom sistemu reference, naprotiv, udarni front miruje,a fluid ima izvesnu brzinu i ispred i iza njega.

Jednačina kontinuiteta 1)<=> $\rho v = const$, kretanja 2)<=> $\rho \frac{dv}{dt} = -gradP$ i jednačina E:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -P div\vec{v} + div\vec{g} + \phi + \psi$$

gde je $\vec{q}$ vektor gustine fluks toplotnog provođenja (za šta se obično uzima tzv. Furier-ov zakon $\vec{q} = -K\nabla T$, gde je K koeficijent toplotne provodnosti, za koji se pretpostavlja da je const.), dok Φ i Ψ označavaju količine toplote oslobođene, u jedinici zapremine fluida i jedinici vremena, respektivno usled unutrašnjeg trenja (tzv. disiptivna f-ija fluida) i usled ostalih uzroka.

Prethodne jednačine (u ovom ili onom obliku) za fluid **van magnetnog polja** daju:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + P + \rho\varepsilon\right)v\right] = 0$$

gde je $v=v_x$ , pošto u izabranom sistemu reference brzina proticanja ima samo tu komponentu.

***Napomena:**

Jednačine (prostiji oblik):

$\rho v = const$ —> jednačina kontinuiteta

iz nje sledi:

$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ *

$\rho \frac{dv}{dt} = -gradP$ —>jednačina kretanja iz nje sledi:

$\rho v\frac{dv}{dx}=-\frac{dP}{dx}$ =>$P_1+\rho_1 v_1^2=P_2+\rho_2 v_2^2$—>zakon održanja impulsa **

Ukoliko se E ne rasipa zračenjem, zakon održanja E je oblika:

$$\frac{1}{2}\rho v^2+P+\rho\varepsilon=const\Rightarrow\varepsilon_1+\frac{P_1}{\rho_1}+\frac{v_1^{\,2}}{2}=\varepsilon_2+\frac{P_2}{\rho_2}+\frac{v_2^{\,2}}{2}\qquad ***$$

Integrišemo li ove jednačine duž jednog malog segmenta x-ose od tačke 1 neposredno ispred fronta do tačke 2 neposredno iza njega, dobićemo sledeće relacije:

$$\rho_1 v_1=\rho_2 v_2\quad *$$

$$\rho_1 v_1^{\,2}+P_1=\rho_2 v_2^{\,2}+P_2\quad **$$

$$\frac{1}{2}v_1^{\,2}+\frac{P_1}{\rho_1}+\varepsilon_1=\frac{1}{2}v_2^{\,2}+\frac{P_2}{\rho_2}+\varepsilon_2\quad ***$$

Pri pisanju druge i treće od navedenih relacija je iskorišćena činjenica da je proizvod ρv konstantan, u skladu sa prvom jednačinom. Ovde je sa ε označena unutrašnja energija fluida po jedinici mase.

Kad se udarni talas prostire kroz elektroprovodni fluid u magnetnom polju, gornje jednačine se moraju modifikovati, pri čemu konkretna forma ovih modifikacija zavisi od geometrije magnetnog polja i uzajamnog odnosa između magnetnih linija sile i ravni udarnog fronta. Radi pojednostavljenja neka je polje homogeno. Ako je udarni front normalan na magnetne linije sile, tj. kada se front kreće normalno na magnetno polje. Pretpostavimo da se smer magnetnih linija sile ne menja pri prolasku kroz udarni front i uzećemo ga za y-osu. Umesto prethodne tri jednačine u ovom slučaju dobijamo:

$$\rho_1 v_1=\rho_2 v_2\quad *'$$

$$\rho_1 v_1^{\,2}+P_1+\frac{1}{2\mu_0}B_1^{\,2}=\rho_2 v_2^{\,2}+P_2+\frac{1}{2\mu_0}B_2^{\,2}\quad **'$$

$$\frac{1}{2}v_1^{\,2}+\frac{P_1}{\rho_1}+\varepsilon_1+\frac{1}{\mu_0\rho_1}B_1^{\,2}=\frac{1}{2}v_2^{\,2}+\frac{P_2}{\rho_2}+\varepsilon_2+\frac{1}{\mu_0\rho_2}B_2^{\,2}\quad ***'$$

zamenjujući P sa $P+\frac{1}{2\mu_0}B^2$ i ε sa $\varepsilon+\frac{1}{2\mu_0\rho}B^2$, tj. dodajući magnetni pritisak i gustinu magnetne energije (obračunatu po jedinici mase gasa) korespodentnim hidrodinamičkim veličinama. Uslov **"zamrznutosti"** magnetnog polja $\left[\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right]$ se pod navedenim uslovima $\vec{v} = v\vec{e}_x, \vec{B} = \vec{B} = B\vec{e}_y, \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ svodi na:

$$\frac{\partial}{\partial x}(vB) = 0 \quad ****'$$

Izvedene jednačine *, **, ***, odnosno *′,**′,***′, ****′ povezuju hidrodinamičke veličine iza udarnog fronta sa onima ispred fronta i u literaturi su poznate kao **Rankine-Hugoniotove jednačine**. Iz njih je moguće pomoću jednačine stanja i kaloričke jednačine

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}(!!); \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho} \qquad \left(\gamma = \frac{C_P}{C_V}\right)(!)$$

naći veličine iza fronta udarnog talasa (indeks 2), ako su poznate veličine sa indeksom1. Za dalja razmatranja korisno je uvesti bezdimenzione parametre.

$$(£) M_1 = v_1\left(\gamma\frac{P_1}{\rho_1}\right)^{-1/2} = v_1\left(\frac{\gamma R_* T_1}{\mu_1}\right)^{-1/2}; \quad X = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad Y = \frac{P_2}{P_1},$$

gde je $M_1$ Mahov broj (odnos brzine prostiranja poremećaja u fluidu i brzine zvuka $v_z$ u njemu), a X i Y parametar kompresije i jačina udarnog talasa. Na osnovu jednačine za ε (!) jednačina *** se može napisati kao:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_2}{\rho_2} \quad (\Diamond)$$

Uvođenjem ovih parametara izrazi * i (!!), kao i ** i (◊) postaju respektivno:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{X}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{X}{Y} \qquad (\$)$$

$$M_1^2\left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{Y-1}{\gamma} \qquad (\#)$$

$$M_1^2\left(1 - \frac{1}{X^2}\right) = \frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{Y}{X} - 1\right)$$

Eliminisanjem Y iz poslednje dve jednačine dobija se kvadratna jednačina po X, oblika:

$$\left(M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}\right)X^2 - \frac{2\left(1+\gamma M_1^2\right)}{\gamma-1}X + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}M_1^2 = 0$$

čije je rešenje (X=1 je trivijalno rešenje-nema udarnog talasa):

$$X_0 = \frac{(\gamma+1)M_1^{\ 2}}{(\gamma-1)M_1^{\ 2}+2}$$

a iz (#)

$$Y_0 = \frac{2\gamma M_1^{\ 2}-(\gamma-1)}{\gamma+1}$$

Zamenom vrednosti iz predhodne dve jednačine u ($) dobija se:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{\left[2\gamma M_1^{\ 2}-(\gamma-1)\right]\left[(\gamma-1)M_1^{\ 2}+2\right]}{(\gamma+1)^2 M_1^{\ 2}}$$

U slučaju jakih udarnih talasa kada je $v_1$>>$v_z$, odnosno $M_1$>>1, dobija se:

$$X_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$Y_0 = \frac{2\gamma M_1^{\ 2}}{\gamma+1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma-1)M_1^{\ 2}}{(\gamma+1)^2}$$

Ako je u pitanju idealan jednoatomni gas $\left(\gamma = C_P / C_v = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}\right)$ prethodne jednačine, s obzirom na (£) postaju:

$$\rho_2 = 4\rho_1; \quad P_2 = \frac{3}{4}\rho_1 v_1^{\ 2}; \quad T_2 = \frac{3\mu_2 v_1^{\ 2}}{16R_*}$$

Očigledno je da je sažimanje fluida ograničeno na četvorostruku vrednost gustine neperturbovanog fluida, dok pritisak i temperatura rastu sa kvadratom Mahovog broja. Ako se npr. u atmosferi zvezde ili međuzvezdanoj sredini kreće udarni talas brzinom $v_1$=10km/s, temperatura iza udarnog fronta raste do $T_2 \approx 1{,}2 \cdot 10^5$ K. U ovom slučaju se u gasu iza fronta udarnog talasa istovremeno odvijaju procesi sudarne jonizacije i radijativne rekombinacije, pa tako nastalo zračenje odnosi deo unutrašnje energije gasa. Zbog toga se ukoliko je ovaj iznos energije značajan, zakon o održanju energije ne može primeniti u obliku datom (***), već se disipativni procesi moraju uzeti u obzir.

Literatura:

1. Osnove fizike gasne plazme – Božidar S. Milić – Beograd, 1989. god.
2. Astrofizika sa astronomijom – Božidar Vujičić i Stevica Đurović – Novi Sad, 1995. god.